УДК 519.6

А. В. Лекомцев, В. Г. Пименов

МЕТОД ТИПА РОЗЕНБРОКА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

1. Введение

Дифференциальные уравнения с дополнительными алгебраическими ограничениями тесно связаны с жесткими и сингулярными обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) и широко применяются в математическом моделировании. Численные методы решения таких дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) изучались в монографии [1]. Но во многих моделях окружающей действительности будущее состояние системы определяется не только настоящим, как в ОДУ, но и прошлым. Математическим описанием этого эффекта являются уравнения с последействиями различных видов, называемые также функционально-дифференциальными уравнениями (ФДУ). Качественные аспекты теории ФДУ изучались многими авторами [2–6], некоторые численные методы решения приведены в [7–9]. Соединение этих двух эффектов: наличие дополнительных алгебраических связей и наличие эффекта последействия – дает новый объект – системы функционально-дифференциально-алгебраических уравнений (ФДАУ). Методы типа Рунге–Кутты численного решения ФДАУ были предложены в работе [10], многошаговые численные методы – в работе [11]. Эти работы следуют методике решения уравнений с запаздыванием, ранее предложенной в [7] и основанной на следующих основных идеях: разделении конечномерной и бесконечномерной составляющих в структуре фазового состояния объекта; построении по конечномерной составляющей полных аналогов для ФДУ известных для ОДУ численных методов; интерполяции дискретной предыстории модели с заданными свойствами для учета бесконечномерной составляющей; применении техники i-гладкого анализа (см. [7]) для получения аналогов тейлоровского разложения функционалов, эти разложения необходимы для выписывания локальной погрешности в конструировании метода.

В данной работе, следуя этим идеям, для ФДАУ конструируются и изучаются методы, известные для ОДУ как методы типа Розенброка (см. [1,12]).

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 08-01-00141.

Методы типа Розенброка принадлежат к большому классу методов, которые стараются избежать решения нелинейных систем и заменяют их последовательностью линейных систем. Поэтому эти методы называются линейно неявными методами Рунге–Кутты.

2. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим систему функционально-дифференциально-алгебраических уравнений

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)), \tag{1}$$

$$0 = g(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)) \tag{2}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = y_0, \qquad z(t_0) = z_0, \tag{3}$$

$$y_{t_0}(\cdot) = \{y^0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}, \qquad z_{t_0}(\cdot) = \{z^0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}, \tag{4}$$

где τ – положительная константа, характеризующая величину интервала запаздывания; $t \in [t_0, t_0 + \theta] \subset \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$, где θ – величина временного интервала; $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство n-мерных векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ (t – знак транспонирования). Скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ определяется по правилу $x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, норма вектора задается формулой $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$. Функциональная предыстория решения ФДАУ определяется как

$$y_t(\cdot) \equiv \{y(t + s), -\tau \leqslant s < 0\} \in Q_n[-\tau, 0),$$
$$z_t(\cdot) \equiv \{z(t + s), -\tau \leqslant s < 0\} \in Q_m[-\tau, 0),$$

где $Q_n[-\tau, 0)$ – пространство n-мерных функций $h(s)$, $-\tau \leqslant s < 0$, со свойствами:

1) $h(\cdot)$ непрерывна на полуинтервале $[-\tau, 0)$, исключая, возможно, конечное число точек разрыва первого рода (в которых $h(\cdot)$ непрерывна справа);

2) существует конечный левый предел $\lim\limits_{s \to 0-} h(s)$ (норма в $Q_n[-\tau, 0)$ определяется формулой $\|h(\cdot)\|_\tau = \sup\limits_{-\tau \leqslant s < 0} \|h(s)\|$).

Наконец,

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times Q_n[-\tau, 0) \times Q_m[-\tau, 0) \to \mathbb{R}^n,$$

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times Q_n[-\tau, 0) \times Q_m[-\tau, 0) \to \mathbb{R}^m,$$

$$y_0 \in \mathbb{R}^n, \quad z_0 \in \mathbb{R}^m, \quad y^0(s) \in Q_n[-\tau, 0), \quad z^0(s) \in Q_m[-\tau, 0).$$

Предположим, что существует единственное решение задачи (1)–(4) на $[t_0, t_0 + \theta]$. Кроме того, предположим, что матрица Якоби g_z существует и обратима в своей области определения.

Задача состоит в том, чтобы распространить известный численный метод типа Розенброка решения обыкновенных дифференциальных уравнений с наличием алгебраических связей (см. [1]) на ФДАУ и исследовать его порядок глобальной сходимости.

3. Описание метода типа Розенброка для ФДАУ

Рассмотрим систему функционально-дифференциально-алгебраических уравнений (1), (2) с начальными условиями (3), (4).

Зададим на $[t_0, t_0 + \theta]$ временную сетку $t_\ell = t_0 + \ell\Delta$, $\ell = 0, \ldots, N$, с равномерным шагом $\Delta = \theta/N$, где N – целое число. Для простоты будем считать, что $\tau/\Delta = M$ – целое число. Введем дискретную численную модель задачи (1)–(4), обозначив приближение точного решения $y(t_\ell) = y_\ell$ в точке t_ℓ через $u_\ell \in \mathbb{R}^n$, а $z(t_\ell) = z_\ell$ в точке t_ℓ через $v_\ell \in \mathbb{R}^m$.

Определение 1. *Дискретной предысторией модели в момент* t_ℓ назовем множество из $M+1$ вектора

$$\big(\{u_i\}_\ell, \{v_i\}_\ell\big)^t = \big\{(u_i, v_i)^t \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ \ell - M \leqslant i \leqslant \ell\big\}.$$

Определение 2. Для любого $a > 0$ *оператором интерполяции–экстраполяции IE предыстории модели* назовем отображение

$$IE : \big(\{u_i\}_\ell, \{v_i\}_\ell\big)^t \to \big(u(\cdot), v(\cdot)\big)^t \in Q_n[t_\ell - \tau,\ t_\ell + a\Delta] \times Q_m[t_\ell - \tau,\ t_\ell + a\Delta].$$

Определение 3. Будем говорить, что оператор IE имеет *порядок погрешности p на точном решении,* если существуют константы A, B такие, что для всех $a > 0$, $\ell = 0, \ldots,\ N-1$, $t \in [t_\ell - \tau,\ t_\ell + a\Delta]$ и $(t_{N-1} + a\Delta) \leqslant t_0 + \theta$

$$\left\| \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\| \leqslant A \max_{\ell - M \leqslant i \leqslant \ell} \left\| \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \right\| + B\Delta^p.$$

В дальнейшем будем предполагать, что задан оператор интерполяции–экстраполяции IE. Например, при конструировании конкретного метода третьего порядка для ФДАУ будем использовать интерполяцию вырожденными сплайнами третьего порядка и экстраполяцию продолжением интерполяционного многочлена третьей степени. Такой способ интерполяции–экстраполяции имеет порядок погрешности 4 (см. [7]).

Будем предполагать, что:

1) оператор IE согласован, т. е.

$$u(t_i) = u_i, \quad v(t_i) = v_i, \quad i = \ell - M, \dots, \ell;$$

2) оператор IE удовлетворяет условию Липшица, то есть найдется константа L_I такая, что для всяких двух наборов дискретных предысторий $\{u_i^1\}_\ell$ и $\{u_i^2\}_\ell$ и для всех $t \in [t_\ell - \tau, t_\ell + a\Delta)$ таких, что $t_\ell + a\Delta \leqslant t_0 + \theta$, выполняется

$$\left\| \begin{pmatrix} u^1(t) \\ v^1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^2(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix} \right\| \leqslant L_I \max_{\ell - M \leqslant i \leqslant \ell} \left\| \begin{pmatrix} u_i^1 \\ v_i^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_i^2 \\ v_i^2 \end{pmatrix} \right\|,$$

где $u^1(\cdot) = IE(\{u_i^1\}_\ell)$, $v^1(\cdot) = IE(\{v_i^1\}_\ell)$, $u^2(\cdot) = IE(\{u_i^2\}_\ell)$, $v^2(\cdot) = IE(\{v_i^2\}_\ell)$.

Определение 4. *s-этапным методом типа Розенброка с набором коэффициентов α_i, σ_i, α_{ij}, γ_{ij}* будем называть численную модель следующего вида:

$$u_0 = y_0, \ v_0 = z_0, \tag{5}$$

$$u_{t_0}(\cdot) = \{y^0(s), \ -\tau \leqslant s < 0\}, \tag{6}$$

$$v_{t_0}(\cdot) = \{z^0(s), \ -\tau \leqslant s < 0\}, \tag{7}$$

$$u_{\ell+1} = u_\ell + \sum_{i=1}^{s} \sigma_i \cdot k_i(u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)), \tag{8}$$

$$v_{\ell+1} = v_\ell + \sum_{i=1}^{s} \sigma_i \cdot p_i(u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)), \tag{9}$$

где отображения $k_i(u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))$ и $p_i(u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))$ определяются как последовательное решение следующих s систем относительно неизвестных k_i и p_i:

$$\begin{aligned} k_i = \Delta \cdot f(t_\ell + \alpha_i\Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell + \alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell + \alpha_i\Delta}(\cdot)) + \\ + \Delta \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot k_j + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot p_j \right) + \Delta^2 \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} \partial_t f, \qquad i = 1, \dots, s, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} 0 = \Delta \cdot g(t_\ell + \alpha_i\Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell + \alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell + \alpha_i\Delta}(\cdot)) + \\ + \Delta \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} (\frac{\partial g}{\partial u} \cdot k_j + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot p_j) + \Delta^2 \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} \partial_t g, \qquad i = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь через r_i, w_i обозначим следующие выражения:

$$r_i = u_\ell + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot k_j(u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)), \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{12}$$

$$w_i = v_\ell + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot p_j(u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)), \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{13}$$

Под $\sum\limits_{i=1}^{0}$ будем понимать 0. Через $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ и $\partial_t f$ обозначены соответственно $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ – матрица частных производных в точке $(t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))$ и $\partial_t f$ – коинвариантная производная в точке $(t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))$ (см. [10]).

4. Разрешимость уравнений численной модели

Введем обозначения:

$$\varphi(t_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)) = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i \cdot k_i(u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)),$$

$$\psi(t_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)) = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i \cdot p_i(u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)).$$

Во всех дальнейших рассуждениях в качестве нормы матрицы будем рассматривать подчиненную норму, т. е.

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Определение 5. Отображение $f(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot))$ назовем *липшицевым по y и z,* если существуют константы P_1, M_1, P_2, M_2 такие, что для любых

$$t \in [t_0, t_0 + \theta], \qquad y^1(t),\ y^2(t) \in \mathbb{R}^n, \qquad z^1(t),\ z^2(t) \in \mathbb{R}^m,$$
$$y_t^1(\cdot),\ y_t^2(\cdot) \in Q_n[-\tau, 0), \qquad z_t^1(\cdot),\ z_t^2(\cdot) \in Q_m[-\tau, 0)$$

выполнено

$$\begin{aligned} \big\| f(t, y^1(t), z^1(t), y_t^1(\cdot), z_t^1(\cdot)) - f(t, y^2(t), z^2(t), y_t^2(\cdot), z_t^2(\cdot)) \big\| \leqslant \\ \leqslant P_1 \|y^1(t) - y^2(t)\| + M_1 \|y_t^1(\cdot) - y_t^2(\cdot)\|_\tau + \\ + P_2 \|z^1(t) - z^2(t)\| + M_2 \|z_t^1(\cdot) - z_t^2(\cdot)\|_\tau. \end{aligned}$$

Если $t \in [t_\ell, t_\ell + \alpha\Delta)$, то из определения 5 следует, что существует константа L такая, что

$$\|f(t_\ell, u_\ell^1, v_\ell^1, u_{t_\ell}^1(\cdot), v_{t_\ell}^1(\cdot)) - f(t_\ell, u_\ell^2, v_\ell^2, u_{t_\ell}^2(\cdot), v_{t_\ell}^2(\cdot))\| \leqslant \\ \leqslant L \sup_{t_\ell - \tau \leqslant t < t_\ell + \alpha\Delta} \left\| \begin{pmatrix} u^1(t) \\ v^1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^2(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix} \right\|.$$

Определение 6. Отображение $f(t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))$ назовем *квазилипшицевым по $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ порядка k,* если существуют константы L и P такие, что для любых u_ℓ^1, $u_\ell^2 \in \mathbb{R}^n$, v_ℓ^1, $v_\ell^2 \in \mathbb{R}^m$, $u_{t_\ell}^1(\cdot)$, $u_{t_\ell}^2(\cdot) \in Q_n[-\tau, 0)$, $v_{t_\ell}^1(\cdot)$, $v_{t_\ell}^2(\cdot) \in Q_m[-\tau, 0)$ выполнено

$$\|f(t_\ell, u_\ell^1, v_\ell^1, u_{t_\ell}^1(\cdot), v_{t_\ell}^1(\cdot)) - f(t_\ell, u_\ell^2, v_\ell^2, u_{t_\ell}^2(\cdot), v_{t_\ell}^2(\cdot))\| \leqslant \\ \leqslant L \sup_{t_\ell - \tau \leqslant t < t_\ell + \alpha\Delta} \left\| \begin{pmatrix} u^1(t) \\ v^1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^2(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix} \right\| + P\Delta^k.$$

Далее будем предполагать, что существуют константы C, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, $C_{\partial_t f}$, $C_{\partial_t g}$ такие, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &\Big\| f(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)) \Big\| \leqslant C, && \Big\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)) \Big\| \leqslant C_1, \\ &\Big\| \frac{\partial f}{\partial z}(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)) \Big\| \leqslant C_2, && \Big\| \frac{\partial g}{\partial y}(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)) \Big\| \leqslant C_3, \\ &\Big\| \frac{\partial g}{\partial z}(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)) \Big\| \leqslant C_4, && \Big\| \Big(\frac{\partial g}{\partial z}\Big)^{-1}(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)) \Big\| \leqslant C_5, \\ &\Big\| \partial_t f(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)) \Big\| \leqslant C_{\partial_t f}, && \Big\| \partial_t g(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)) \Big\| \leqslant C_{\partial_t g}. \end{aligned}$$

Кроме того, мы будем предполагать, что для любого $\delta > 0$ найдется U-окрестность (под окрестностью понимается норма разности) точки $A = (t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))$ такая, что для любой точки $B = (t, u, v, u(\cdot), v(\cdot))$ из этой окрестности норма m-мерного вектора

$$\|g_v^{-1} g(t, u, v, u(\cdot), v(\cdot))\| \leqslant \delta.$$

Теорема 1. *Пусть шаг разбиения $\Delta < \dfrac{1}{\gamma(C_1 + C_2 C_3 C_5)}$ и якобианы*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)), && \frac{\partial f}{\partial z}(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)), \\ &\frac{\partial g}{\partial y}(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)), && \frac{\partial g}{\partial z}(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)) \end{aligned}$$

вместе с коинвариантными производными

$$\partial_t f(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot)), \qquad \partial_t g(t, y(t), z(t), y_t(\cdot), z_t(\cdot))$$

липшицевы по y *и* z. *Тогда существует единственное решение*

$$W = \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_s \\ p_1 & \cdots & p_s \end{pmatrix}^t$$

системы уравнений (10)–(11), *причем отображения* $k_1, \ldots, k_s, p_1, \ldots, p_s$, *а также*

$$\varphi(t_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)) \quad и \quad \psi(t_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))$$

квазилипшицевы по $u(\cdot)$ *и* $v(\cdot)$ *порядка* $p+1$ *(*p *– произвольное положительное целое число).*

Перед доказательством теоремы сформулируем несколько вспомогательных определений и лемм. При всех дальнейших рассуждениях мы будем находиться в условиях теоремы 1.

Пусть

$$u^1(\cdot),\ u^2(\cdot) \in Q_n[t_\ell - \tau, t_\ell + \alpha\Delta), \quad v^1(\cdot),\ v^2(\cdot) \in Q_m[t_\ell - \tau, t_\ell + \alpha\Delta).$$

Введем следующие обозначения:

$$u_\ell^1 = u^1(t_\ell), \quad u_\ell^2 = u^2(t_\ell), \qquad v_\ell^1 = v^1(t_\ell), \quad v_\ell^2 = v^2(t_\ell),$$
$$k_i^1(u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)) = k_i^1, \qquad k_i^2(u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)) = k_i^2,$$
$$f^i(\ell) = f(t, u_\ell^i, v_\ell^i, u_{t_\ell}^i(\cdot), v_{t_\ell}^i(\cdot)).$$

Аналогичные обозначения и для производных функции f.

Лемма 1. *Отображение* $(E - \Delta\gamma f_u(\ell))^{-1}$ *является квазилипшицевым порядка* $p+1$.

Доказательство. При условиях теоремы 1 имеем

$$(E - \Delta\gamma f_u^1(\ell))^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (\Delta\gamma f_u^1(\ell))^i,$$
$$(E - \Delta\gamma f_u^2(\ell))^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (\Delta\gamma f_u^2(\ell))^i.$$

Так как из сходимости ряда следует его ограниченность, то получаем

$$\|(E-\Delta\gamma f_u^1(\ell))^{-1}-(E-\Delta\gamma f_u^2(\ell))^{-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Delta\gamma(f_u^1(\ell)-f_u^2(\ell))+\ldots+\Delta^p\gamma^p((f_u^1(\ell))^p-(f_u^2(\ell))^p)\|+\overline{P}\Delta^{p+1}.$$

Так как f и g являются липшицевыми по y и z, то суперпозиция $f*g$ тоже является липшицевой по y и z. Следовательно f^2, f^3, ..., f^p являются липшицевыми по y и z. Тогда

$$\|(E-\Delta\gamma f_u^1(\ell))^{-1}-(E-\Delta\gamma f_u^2(\ell))^{-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant (\Delta\gamma L_1+\ldots+\Delta^p\gamma^p L_p)\cdot \sup_{t_\ell-\tau\leqslant t<t_\ell+\alpha\Delta}\left\|\begin{pmatrix}u^1(t)\\ v^1(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u^2(t)\\ v^2(t)\end{pmatrix}\right\|+\overline{P}\Delta^{p+1}.$$

Лемма 2. *Пусть f является квазилипшицевым порядка n, а g – липшицево. Также предполагаем, что $\|f\|\leqslant M_1$, $\|g\|\leqslant M_2$. Тогда суперпозиция $f*g$ является квазилипшицевым отображением порядка n.*

Доказательство.

$$\|f^1(\ell)\cdot g^1(\ell)-f^2(\ell)\cdot g^2(\ell)\| =$$
$$= \|f^1(\ell)\cdot g^1(\ell)-f^2(\ell)\cdot g^2(\ell)\pm f^1(\ell)\cdot g^2(\ell)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f^1(\ell)\|\cdot\|g^1(\ell)-g^2(\ell)\|+\|g^2(\ell)\|\cdot\|f^1(\ell)-f^2(\ell)\| \leqslant$$
$$\leqslant (M_1L_g+M_2L_f)\cdot \sup_{t_\ell-\tau\leqslant t<t_\ell+\alpha\Delta}\left\|\begin{pmatrix}u^1(t)\\ v^1(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u^2(t)\\ v^2(t)\end{pmatrix}\right\|+M_2\cdot P\cdot\Delta^n.$$

Из лемм 1 и 2 мы получаем

Следствие 1. *Отображение $(E-\Delta\gamma f_u(\ell))^{-1}f(\ell)$ является квазилипшицевым порядка $p+1$ с константой Липшица*

$$L_I=\frac{L_f}{1-\Delta\gamma\|f_u(l)\|}+C\cdot(\Delta\gamma L_1+\ldots+\Delta^p\gamma^p L_p).$$

Аналогично $\gamma(E-\Delta\gamma f_u(\ell))^{-1}\partial_t f(l)$ является квазилипшицевым порядка $p+1$ с константой Липшица

$$L_{II}=\frac{\gamma L_{\partial_t f}}{1-\Delta\gamma\|f_u(l)\|}+\gamma C_{\partial_t f}\cdot(\Delta\gamma L_1+\ldots+\Delta^p\gamma^p L_p).$$

Лемма 3. *Пусть для любого* $\delta > 0$ *существует такая* U*-окрестность точки* $A = (t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))$*, что для любой точки из этой окрестности выполняется*

$$\|g_v^{-1} g(t_\ell + \alpha_i \Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot))\| \leqslant \delta.$$

Тогда

1) $(t_\ell + \alpha_i \Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot))$ *попадет в* U*-окрестность при малом* Δ*,* $i = 1, \ldots, s$*;*

2) $\|k_i\| \leqslant B_i^k \Delta$*,* $i = 1, \ldots, s$*;*

3) $\|p_i\| \leqslant B_i^\ell \Delta$*,* $i = 1, \ldots, s$*.*

Доказательство. Выпишем определение r_i и w_i из (12) и (13):

$$r_i = u_\ell + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot k_j, \qquad w_i = v_\ell + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot p_j.$$

Докажем утверждения 1–3 леммы 3 индукцией по i.
База индукции. Пусть $i = 1$. Тогда

$$(t_\ell + \alpha_1 \Delta, r_1, w_1, u_{t_\ell+\alpha_1\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_1\Delta}(\cdot)) = (t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)).$$

Следовательно, пункт 1 выполняется. Из (10) мы получаем, что

$$\left(I - \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial u}\right) \cdot k_1 = \Delta f(t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)) + \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial v} p_1 + \Delta^2 \gamma \partial_t f,$$

отсюда имеем

$$\|k_1\| \leqslant \frac{\Delta}{1 - \Delta\gamma C_1} (C + C_2 \gamma \|p_1\| + \Delta\gamma C_{\partial_t f}).$$

Используя (11), получаем следующее

$$p_1 = (-g_v^{-1}) \left(\frac{1}{\gamma} g(t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)) + \frac{\partial g}{\partial u} k_1 + \Delta \partial_t g \right),$$

поэтому из этого соотношения выводим, что

$$\|p_1\| \leqslant \frac{1}{\gamma} \|g_v^{-1} g(t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))\| + C_5 C_3 \|k_1\| + \Delta C_{\partial_t f}.$$

Берем такую окрестность U точки , что $\|g_v^{-1}g(t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))\| \leqslant \gamma\Delta$, тогда

$$\|p_1\| \leqslant \Delta + C_5C_3\|k_1\| + \Delta C_{\partial_t f}.$$

Подставляя это выражение в оценку для нормы k_1, получаем

$$\|k_1\| \leqslant \frac{\Delta}{1-\Delta\gamma C_1}(C + C_2\gamma(\Delta + C_5C_3\|k_1\| + \Delta C_{\partial_t f}) + \Delta\gamma C_{\partial_t f}).$$

Отсюда имеем

$$\|k_1\|\left(\frac{1-\Delta\gamma(C_1+C_2C_3C_5)}{1-\Delta\gamma C_1}\right) \leqslant \frac{\Delta}{1-\Delta\gamma C_1}(C + C_2\gamma(\Delta + \Delta C_{\partial_t f}) + \Delta\gamma C_{\partial_t f}),$$

следовательно,

$$\|k_1\| \leqslant \frac{C + C_2\gamma(\Delta + \Delta C_{\partial_t f}) + \Delta\gamma C_{\partial_t f}}{1-\Delta\gamma(C_1+C_2C_3C_5)}\Delta.$$

При ограничениях на Δ в условиях теоремы имеем $\|k_1\| \leqslant B_1^k\Delta$, а так как

$$\|p_1\| \leqslant \Delta + C_5C_3\|k_1\| + \Delta C_{\partial_t f} \leqslant (1 + C_5C_3B_1^k + C_{\partial_t f})\Delta,$$

то $\|p_1\| \leqslant B_1^\ell\Delta$.

Шаг индукции. Пусть предположение индукции выполняется для всех индексов $\leqslant i-1$. Докажем, что оно верно и для индекса i. Имеем равенства

$$k_i = \Delta\cdot f(t_\ell + \alpha_i\Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot)) + \\ + \Delta\sum_{j=1}^{i}\gamma_{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot k_j + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot p_j\right) + \Delta^2\sum_{j=1}^{i}\gamma_{ij}\partial_t f.$$

$$p_i = (-g_v^{-1})\Bigg(\frac{1}{\gamma}g(t_\ell + \alpha_i\Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot)) + \\ + \frac{\partial g}{\partial u}k_i + \frac{\Delta\gamma_i}{\gamma}\partial_t g + \frac{\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}}{\gamma}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot k_j + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot p_j\right)\Bigg).$$

Обозначим

$$\overline{\alpha} = \max_{i,j}\{|\alpha_{ij}|\},\ \overline{\gamma} = \max_{i,j}\{|\gamma_{ij}|\}.$$

Тогда

$$\left\|\begin{pmatrix} r_i \\ w_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_\ell \\ v_\ell \end{pmatrix}\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}\cdot\max_{j=\overline{1,i-1}}\left\|\begin{pmatrix} k_j \\ p_j \end{pmatrix}\right\| \leqslant s\overline{\alpha}\left(\max_{j=\overline{1,i-1}}B_j^k + \max_{j=\overline{1,i-1}}B_j^\ell\right)\Delta.$$

Следовательно, при достаточно малом шаге интегрирования Δ точка

$$(t_\ell + \alpha_i\Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot))$$

лежит в U-окрестности точки $(t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))$. Тогда возьмем такую окрестность U точки A, что

$$\|g_v^{-1} g(t_\ell + \alpha_i\Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot))\| \leqslant \gamma\delta.$$

Оценим нормы $\|k_i\|$ и $\|p_i\|$. Из (11) получаем, что

$$\begin{aligned}\|p_i\| \leqslant \Bigg\|(-g_v^{-1})\bigg(&\frac{1}{\gamma} g(t_\ell + \alpha_i\Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot)) + \\ &+ \frac{\partial g}{\partial u}k_i + \frac{\Delta\gamma_i}{\gamma}\partial_t g + \frac{\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}}{\gamma}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot k_j + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot p_j\right)\bigg)\Bigg\| \leqslant \\ \leqslant \Delta + C_5C_3\|k_i\| &+ \frac{s\overline{\gamma}}{\gamma}C_{\partial_t g}C_5\Delta + \\ &+ \frac{s\overline{\gamma}}{\gamma}C_5C_3\left(\max_{j=\overline{1,j-1}} B_j^k\right)\Delta + \frac{s\overline{\gamma}}{\gamma}C_5C_4\left(\max_{j=\overline{1,j-1}} B_j^\ell\right)\Delta.\end{aligned} \tag{14}$$

Теперь оценим норму k_i. С помощью (10) получаем

$$\begin{aligned}\|k_i\| \leqslant \frac{\Delta}{1-\Delta\gamma C_1}\bigg[C &+ s\overline{\gamma}\Delta C_{\partial_t f} + s\overline{\gamma}C_1\Delta \max_{j=\overline{1,i-1}} B_j^k + s\overline{\gamma}C_2\Delta \max_{j=\overline{1,i-1}} B_j^\ell + \\ &+ C_2\gamma\bigg(\Delta + C_5C_3\|k_i\| + \frac{s\overline{\gamma}}{\gamma}C_{\partial_t g}C_5\Delta + \\ &+ \frac{s\overline{\gamma}}{\gamma}C_5C_3\left(\max_{j=\overline{1,j-1}} B_j^k\right)\Delta + \frac{s\overline{\gamma}}{\gamma}C_5C_4\left(\max_{j=\overline{1,j-1}} B_j^\ell\right)\Delta\bigg)\bigg],\end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\|k_i\| \leqslant \frac{\Delta}{1-\Delta\gamma(C_1 + C_2C_3C_5)}\bigg[C &+ s\overline{\gamma}\Delta C_{\partial_t f} + s\overline{\gamma}C_1\Delta \max_{j=\overline{1,i-1}} B_j^k + \\ &+ s\overline{\gamma}C_2\Delta \max_{j=\overline{1,i-1}} B_j^\ell + C_2\gamma\bigg(\Delta + \frac{s\overline{\gamma}}{\gamma}C_{\partial_t g}C_5\Delta + \\ &+ \frac{s\overline{\gamma}}{\gamma}C_5C_3\left(\max_{j=\overline{1,j-1}} B_j^k\right)\Delta + \frac{s\overline{\gamma}}{\gamma}C_5C_4\left(\max_{j=\overline{1,j-1}} B_j^\ell\right)\Delta\bigg)\bigg].\end{aligned}$$

При ограничениях на Δ в условиях теоремы имеем $\|k_i\| \leqslant B_i^k\Delta$, откуда с помощью (14) получаем $\|p_i\| \leqslant B_i^\ell\Delta$.

Из леммы 3 мы получаем, что для $\delta = \gamma\Delta$ существует U-окрестность точки $A = (t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot))$ такая, что для любого $i = \overline{1, s}$ выполняется

$$\|g_v^{-1} g(t_\ell + \alpha_i\Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot))\| \leqslant \gamma\Delta. \qquad (15)$$

Перейдем к рассмотрению доказательства теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. В векторном пространстве $\mathbb{R}^{2s}$ для вектора $W = \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_s \\ p_1 & \cdots & p_s \end{pmatrix}^t$ введем норму $\|W\| = \max\limits_{i=1,\dots,\ s} \|k_i\| + \max\limits_{i=1,\dots,\ s} \|p_i\|$. Тогда первые i уравнений системы (10)–(11) можно записать в виде

$$J = \Phi(J), \qquad (16)$$

где $J = (k_1, \dots, k_i)$ (считаем, что мы уже определили $p_1, \dots, p_{i-1}$).

Обозначим через A матрицу

$$\begin{pmatrix} E - \gamma\Delta\frac{\partial f}{\partial y} & -\gamma\Delta\frac{\partial f}{\partial z} \\ -\gamma\Delta\frac{\partial g}{\partial y} & -\gamma\Delta\frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Выразим из (11) p_i.

$$0 = \Delta \cdot g\Bigg(t_\ell + \alpha_i\Delta, u_\ell + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot k_j, v_\ell + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot p_j, u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot)\Bigg) +$$
$$+ \Delta\gamma\frac{\partial g}{\partial u}k_i + \Delta\gamma\frac{\partial g}{\partial v}p_i + \Delta\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot k_j + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot p_j\right) + \Delta^2\gamma_i\partial_t g.$$

Разделим левую и правую части этого уравнения на $\Delta\gamma$ и воспользуемся тем, что $(\alpha B)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}B^{-1}$ при $\alpha \neq 0$. Тогда получим

$$p_i = (-g_v^{-1})\Bigg(\frac{1}{\gamma}g\big(t_\ell + \alpha_i\Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot)\big) +$$
$$+ \frac{\partial g}{\partial u}k_i + \frac{\Delta\gamma_i}{\gamma}\partial_t g + \frac{\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}}{\gamma}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot k_j + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot p_j\right)\Bigg),\ i = 1, \dots, s.$$

Докажем индукцией по i, что существует единственное решение системы (10)–(11) для любого $i \in$\{1,…,s\}, причем отображения $k_1, \dots, k_s, p_1, \dots, p_s$ квазилипшицевы порядка $p + 1$.

База индукции. Пусть $i = 1$.

$$p_1 = (-g_v^{-1})\left(\frac{1}{\gamma}g\big(t_\ell+\alpha_1\Delta, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell+\alpha_1\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_1\Delta}(\cdot)\big) + \frac{\partial g}{\partial u}k_1 + \Delta\partial_t g\right), \tag{17}$$

$$\begin{aligned}(E-\Delta\gamma\frac{\partial f}{\partial u})\cdot k_1 = \Delta f\big(t_\ell+\alpha_1\Delta, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell+\alpha_1\Delta}(\cdot), v_{t_\ell+\alpha_1\Delta}(\cdot)\big) +\\ + \Delta\gamma\frac{\partial f}{\partial v}p_1 + \Delta^2\gamma\partial_t f.\end{aligned} \tag{18}$$

Если $h < \dfrac{1}{\gamma\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|}$, то существует $(I-\Delta\gamma\frac{\partial f}{\partial u})^{-1}$. Подставим p_1 из (17) в (18) и представим уравнение (18) в виде $k_1 = \widetilde{\Phi}(k_1)$. Докажем, что отображение $\widetilde{\Phi}$ является сжимающим. Тогда существует единственное k_1, являющееся решением этого уравнения.

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\Phi}(k_1^1)-\widetilde{\Phi}(k_1^2)\right\| = \Bigg\|\left(I-\Delta\gamma\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{-1}\Bigg(\Delta f - \Delta f + \Delta^2\gamma\partial_t f - \Delta^2\gamma\partial_t f +\\ + \Delta\gamma\frac{\partial f}{\partial v}\left(p_1^1-p_1^2\right)\Bigg)\Bigg\|.\end{aligned}$$

$\left(E-\Delta\gamma\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)$ в точке t_ℓ является матрицей. И так как $\|Af\| \leqslant \|A\|\|f\|$, то имеем

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\Phi}(k_1^1)-\widetilde{\Phi}(k_1^2)\right\| \leqslant \left\|\left(I-\Delta\gamma\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{-1}\right\|\cdot\Delta\gamma\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\left(p_1^1-p_1^2\right)\right\| \leqslant\\ \leqslant \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma\Delta\frac{\partial f}{\partial u})^n\right\|\cdot\Delta\gamma\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|\cdot\|p_1^1-p_1^2\|, \quad \text{при}\ \gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\| < 1.\end{aligned}$$

Далее получаем, что

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\Phi}(k_1^1)-\widetilde{\Phi}(k_1^2)\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left(\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|\right)^n\cdot\Delta\gamma\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|\cdot\left\|p_1^1-p_1^2\right\| \leqslant\\ \leqslant \frac{\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|}{1-\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|}\left\|p_1^1-p_1^2\right\| =\\ = \frac{\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|}{1-\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|}\Bigg\|\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^{-1}\Bigg(\frac{1}{\gamma}g(t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)) -\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\gamma}g(t_\ell, u_\ell, v_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)) + \Delta\partial_t g - \Delta\partial_t g + \frac{\partial f}{\partial u}\left(k_1^1 - k_1^2\right)\Big)\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Delta\gamma\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|\left\|\frac{\partial g}{\partial u}\right\|\left\|(\frac{\partial g}{\partial v})^{-1}\right\|}{1-\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|}\cdot\left\|k_1^1 - k_1^2\right\|.$$

Из условий теоремы на шаг Δ вытекает, что оператор $\widetilde{\Phi}$ будет сжимающим. Следовательно, применяя принцип сжимающих отображений к итерационной процедуре $k_1^{i+1} = \widetilde{\Phi}(k_1^i)$, получаем в пределе решение k_1. Откуда заключаем, что существует единственное решение p_1, так как p_1 выражается через k_1 по формуле (17).

Теперь докажем, что k_1 и p_1 квазилипшицевы порядка $p+1$. Рассмотрим следующую разность:

$$\left\|k_1^1 - k_1^2\right\| = \left\|\left(E - \Delta\gamma\frac{\partial f^1}{\partial u}\right)^{-1}\cdot\left(\Delta f^1(\ell) + \Delta^2\gamma\partial_t f^1(\ell) + \Delta\gamma\frac{\partial f^1}{\partial v}(\ell)\cdot p_1^1\right) - \right.$$
$$\left. - \left(E - \Delta\gamma\frac{\partial f^2}{\partial u}\right)^{-1}\cdot\left(\Delta f^2(\ell) + \Delta^2\gamma\partial_t f^2(\ell) + \Delta\gamma\frac{\partial f^2}{\partial v}(\ell)\cdot p_1^2\right)\right\|.$$

Используя следствие 1, получаем

$$\left\|k_1^1 - k_1^2\right\| \leqslant (\Delta L_I + \Delta^2 L_{II})\cdot\sup_{t_\ell-\tau\leqslant t<t_\ell+\alpha\Delta}\left\|\begin{pmatrix}u^1(t)\\ v^1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}u^2(t)\\ v^2(t)\end{pmatrix}\right\| +$$
$$+\frac{\Delta\gamma C_2}{1-\Delta\gamma C_1}\left\|p_1^1 - p_1^2\right\| + K\Delta^{p+1}. \tag{19}$$

Воспользуемся (15) и (17) для оценки нормы разности между p_1^1 и p_1^2:

$$\left\|p_1^1 - p_1^2\right\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\left\|g_v^{-1}g(t_\ell, u_\ell^1, v_\ell^1, u_{t_\ell}^1(\cdot), v_{t_\ell}^1(\cdot)) - g_v^{-1}g(t_\ell, u_\ell^2, v_\ell^2, u_{t_\ell}^2(\cdot), v_{t_\ell}^2(\cdot))\right\| +$$
$$+ (C_5\Delta L_{\partial_t g})\left\|\begin{pmatrix}u^1(t)\\ v^1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}u^2(t)\\ v^2(t)\end{pmatrix}\right\| + C_5C_3\left\|k_1^1 - k_1^2\right\| =$$
$$= \frac{1}{\gamma}\left\|g_v^{-1}g_v g_v^{-1}g(t_\ell, u_\ell^1, v_\ell^1, u_{t_\ell}^1(\cdot), v_{t_\ell}^1(\cdot)) - g_v^{-1}g_v g_v^{-1}g(t_\ell, u_\ell^2, v_\ell^2, u_{t_\ell}^2(\cdot), v_{t_\ell}^2(\cdot))\right\| +$$
$$+ (C_5\Delta L_{\partial_t g})\left\|\begin{pmatrix}u^1(t)\\ v^1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}u^2(t)\\ v^2(t)\end{pmatrix}\right\| + C_5C_3\left\|k_1^1 - k_1^2\right\| \leqslant$$
$$\leqslant C_5\Delta(L_{g_v} + L_{\partial_t g})\left\|\begin{pmatrix}u^1(t)\\ v^1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}u^2(t)\\ v^2(t)\end{pmatrix}\right\| + C_5C_3\left\|k_1^1 - k_1^2\right\|. \tag{20}$$

Подставляя в (19) выражение для $\left\|p_1^1 - p_1^2\right\|$, получаем

$$\left\|k_1^1 - k_1^2\right\| \leqslant (\Delta L_I + \Delta^2 L_{II}) \cdot \sup_{t_\ell - \tau \leqslant t < t_\ell + \alpha\Delta} \left\| \begin{pmatrix} u^1(t) \\ v^1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^2(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix} \right\| +$$
$$+ \frac{\Delta\gamma C_2}{1 - \Delta\gamma C_1} \left(C_5 \Delta (L_{g_v} + L_{\partial_t g}) \left\| \begin{pmatrix} u^1(t) \\ v^1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^2(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix} \right\| + C_5 C_3 \left\|k_1^1 - k_1^2\right\| \right) + K\Delta^{p+1},$$

следовательно,

$$\left\|k_1^1 - k_1^2\right\| \leqslant \frac{1 - \gamma\Delta C_1}{1 - \Delta\gamma(C_1 + C_2 C_3 C_5)} \left(\Delta L_I + \Delta^2 L_{II} + \frac{\Delta^2 \gamma C_2 C_5}{1 - \Delta\gamma C_1} (L_{g_v} + L_{\partial_t g}) \right) \cdot$$
$$\cdot \sup_{t_\ell - \tau \leqslant t < t_\ell + \alpha\Delta} \left\| \begin{pmatrix} u^1(t) \\ v^1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^2(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix} \right\| + \frac{1 - \gamma\Delta C_1}{1 - \Delta\gamma(C_1 + C_2 C_3 C_5)} K\Delta^{p+1}.$$

При ограничениях на Δ в условиях теоремы получаем, что k_1 является квазилипшицевой порядка $p + 1$.

Используя (20) получим, что p_1 тоже является квазилипшицевой порядка $p + 1$. Заметим, что у констант Липшица для k_1 и p_1 присутствует сомножитель Δ.

Шаг индукции. Пусть предположение индукции выполняется для всех индексов $\leqslant i - 1$. Докажем, что оно верно и для индекса i.

Из (10) и (11) получаем, что

$$k_i = \left(E - \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial u} \right)^{-1} \left(\Delta \cdot f(t_\ell + \alpha_i \Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell + \alpha_i \Delta}(\cdot), v_{t_\ell + \alpha_i \Delta}(\cdot)) + \right.$$
$$\left. + \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial v} \cdot p_i + \Delta \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot k_j + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot p_j \right) + \Delta^2 \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} \partial_t f \right), \tag{21}$$

$$p_i = g_v^{-1} \left(\frac{1}{\gamma} g\big(t_\ell + \alpha_i \Delta, r_i, w_i, u_{t_\ell + \alpha_i \Delta}(\cdot), v_{t_\ell + \alpha_i \Delta}(\cdot)\big) + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot k_i + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\gamma_{ij}}{\gamma} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \cdot k_j + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot p_j \right) + \Delta \sum_{j=1}^{i} \frac{\gamma_{ij}}{\gamma} \partial_t g \right). \tag{22}$$

Если $h < \dfrac{1}{\gamma \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\|}$, то существует $\left(I - \Delta\gamma \dfrac{\partial f}{\partial u} \right)^{-1}$. Подставим p_i из (22) в (21).

Тогда уравнение (21) может быть представлено в виде $k_i = \widetilde{\Phi}(k_i)$. По предположению индукции мы считаем, что уже нашли единственные отображения $k_1, \ldots, k_{i-1}, p_1, \ldots, p_{i-1}$, являющиеся решениями соответствующих уравнений. Докажем, что отображение $\widetilde{\Phi}$ является сжимающим. Тогда существует единственное k_i, являющееся решением этого уравнения.

$$\big\|\widetilde{\Phi}(k_i^1)-\widetilde{\Phi}(k_i^2)\big\|=$$

$$\Bigg\|\left(E-\Delta\gamma\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{-1}\Big(\Delta f(t_\ell+\alpha_i\Delta,r_i,w_i,u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot),v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot))-$$

$$-\Delta f(t_\ell+\alpha_i\Delta,r_i,w_i,u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot),v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot))+\Delta^2\sum_{j=1}^{i}\gamma_{ij}\partial_t f-\Delta^2\sum_{j=1}^{i}\gamma_{ij}\partial_t f+$$

$$+\Delta\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot k_j+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot p_j\right)-\Delta\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot k_j+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot p_j\right)+$$

$$+\Delta\gamma\frac{\partial f}{\partial v}\left(p_i^1-p_i^2\right)\Big)\Bigg\|.$$

$\left(E-\Delta\gamma\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)$ в точке t_ℓ является матрицей. И так как $\|Af\|\leqslant\|A\|\|f\|$, то имеем

$$\big\|\widetilde{\Phi}(k_i^1)-\widetilde{\Phi}(k_i^2)\big\|\leqslant\left\|\left(E-\Delta\gamma\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{-1}\right\|\cdot\Delta\gamma\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\big(p_i^1-p_i^2\big)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\gamma\Delta\frac{\partial f}{\partial u}\right)^n\right\|\cdot\Delta\gamma\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|\cdot\big\|p_i^1-p_i^2\big\|,\quad \text{при } \gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|<1.$$

Далее получаем, что

$$\big\|\widetilde{\Phi}(k_i^1)-\widetilde{\Phi}(k_i^2)\big\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left(\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|\right)^n\cdot\Delta\gamma\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|\cdot\big\|p_i^1-p_i^2\big\|\leqslant\frac{\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|}{1-\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|}\big\|p_i^1-p_i^2\big\|=$$

$$=\frac{\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|}{1-\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|}\Bigg\|g_v^{-1}\Bigg(\frac{1}{\gamma}g(t_\ell+\alpha_i\Delta,r_i,w_i,u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot),v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot))-$$

$$-\frac{1}{\gamma}g(t_\ell+\alpha_i\Delta,r_i,w_i,u_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot),v_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot))+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\gamma_{ij}}{\gamma}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot k_j+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot p_j\right)-$$

$$-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\gamma_{ij}}{\gamma}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\cdot k_j+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot p_j\right)+\Delta\sum_{j=1}^{i}\frac{\gamma_{ij}}{\gamma}\partial_t g-\Delta\sum_{j=1}^{i}\frac{\gamma_{ij}}{\gamma}\partial_t g+\frac{\partial g}{\partial u}\big(k_i^1-k_i^2\big)\Bigg)\Bigg\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\Delta\gamma\left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|\left\|\frac{\partial g}{\partial u}\right\|\left\|(\frac{\partial g}{\partial v})^{-1}\right\|}{1-\gamma\Delta\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|}\cdot\big\|k_i^1-k_i^2\big\|.$$

Тогда из условий теоремы на шаг Δ следует, что оператор $\widetilde{\Phi}$ будет сжимающим. Следовательно, применяя принцип сжимающих отображений к итерационной процедуре $k_i^{i+1} = \widetilde{\Phi}(k_i^i)$, получаем в пределе решение k_i. Откуда заключаем, что существует единственное решение p_i, так как p_i выражается через k_i по формуле (22).

Докажем квазилипшицевость порядка $p+1$ отображений k_i и p_i.

$$\begin{aligned}\|k_i^1 - k_i^2\| = \Bigg\| &\left(E - \Delta\gamma\frac{\partial f^1}{\partial u}\right)^{-1} \Bigg(\Delta \cdot f(t_\ell + \alpha_i\Delta, r_i^1, w_i^1, u^1_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v^1_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot)) + \\ &+ \Delta\gamma\frac{\partial f^1}{\partial v}\cdot p_i^1 + \Delta^2\sum_{j=1}^{i}\gamma_{ij}\partial_t f^1 + \Delta\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}\left(\frac{\partial f^1}{\partial u}\cdot k_j^1 + \frac{\partial f^1}{\partial v}\cdot p_j^1\right)\Bigg) - \\ &- (E - \Delta\gamma\frac{\partial f^2}{\partial u})^{-1}\Bigg(\Delta \cdot f(t_\ell + \alpha_i\Delta, r_i^2, w_i^2, u^2_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot), v^2_{t_\ell+\alpha_i\Delta}(\cdot)) + \\ &+ \Delta\gamma\frac{\partial f^2}{\partial v}\cdot p_i^2 + \Delta^2\sum_{j=1}^{i}\gamma_{ij}\partial_t f^2 + \Delta\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}\left(\frac{\partial f^2}{\partial u}\cdot k_j^2 + \frac{\partial f^2}{\partial v}\cdot p_j^2\right)\Bigg)\Bigg\|.\end{aligned}$$

В силу квазилипшицевости порядка $p+1$ отображений $k_1, \ldots, k_{i-1}, p_1, \ldots, p_{i-1}$ из формул (12) и (13) следует, что r_i и w_i тоже квазилипшицевы порядка $p+1$. Тогда в силу лемм 1–3, липшицевости отображения f по y и z и предположения индукции получаем квазилипшицевость порядка $p+1$ для всех слагаемых, не содержащих p_i. Тогда

$$\begin{aligned}\|k_i^1 - k_i^2\| \leqslant \Delta L_{III} \cdot \sup_{t_\ell-\tau\leqslant t<t_\ell+\alpha\Delta}\left\|\begin{pmatrix}u^1(t)\\v^1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}u^2(t)\\v^2(t)\end{pmatrix}\right\| + \\ + T\cdot\Delta^{p+1} + \frac{\Delta\gamma C_2}{1-\Delta\gamma C_1}\|p_i^1 - p_i^2\|.\end{aligned}$$

Аналогично доказательству в базе индукции докажем квазилипшицевость порядка $p+1$ отображения p_i.

$$\begin{aligned}\|p_i^1 - p_i^2\| \leqslant &\left(C_5\Delta + sC_5\frac{\overline{\gamma}}{\gamma}\Delta L_{\partial_t g}\right)\sup_{t_\ell-\tau\leqslant t<t_\ell+\alpha\Delta}\left\|\begin{pmatrix}u^1(t)\\v^1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}u^2(t)\\v^2(t)\end{pmatrix}\right\| + \\ &+ C_3C_5\|k_i^1 - k_i^2\| + C_5\frac{(s-1)\overline{\gamma}}{\gamma}\times \\ &\times\Bigg[C_1\Bigg(\Bigg(\sum_{j=1}^{i-1}L_j^k\Bigg)\sup_{t_\ell-\tau\leqslant t<t_\ell+\alpha\Delta}\left\|\begin{pmatrix}u^1(t)\\v^1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}u^2(t)\\v^2(t)\end{pmatrix}\right\| + \Bigg(\sum_{j=1}^{i-1}L_j^k\Bigg)\Delta^{p+1}\Bigg) + \\ &+ C_4\Bigg(\Bigg(\sum_{j=1}^{i-1}L_j^\ell\Bigg)\sup_{t_\ell-\tau\leqslant t<t_\ell+\alpha\Delta}\left\|\begin{pmatrix}u^1(t)\\v^1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}u^2(t)\\v^2(t)\end{pmatrix}\right\| + \Bigg(\sum_{j=1}^{i-1}L_j^\ell\Bigg)\Delta^{p+1}\Bigg)\Bigg].\end{aligned}$$

Далее, подставляя $\left\|p_i^1 - p_i^2\right\|$ в неравенство, связанное с $\left\|k_i^1 - k_i^2\right\|$, получаем

$$\left(1 - \frac{\Delta\gamma C_2 C_3 C_5}{1 - \Delta\gamma C_1}\right)\left\|k_i^1 - k_i^2\right\| \leqslant \Delta L_K \sup_{t_\ell - \tau \leqslant t < t_\ell + \alpha\Delta} \left\|\begin{pmatrix} u^1(t) \\ v^1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^2(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix}\right\| + \\ + \frac{\overline{C}\Delta^{p+2}}{1 - \gamma\Delta C_1} + T \cdot \Delta^{p+1}.$$

При условиях на Δ в условиях теоремы получаем

$$\left\|k_i^1 - k_i^2\right\| \leqslant \Delta\overline{L_K} \sup_{t_\ell - \tau \leqslant t < t_\ell + \alpha\Delta} \left\|\begin{pmatrix} u^1(t) \\ v^1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^2(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix}\right\| + \overline{T}\Delta^{p+1}.$$

Следовательно, k_i квазилипшицева порядка $p+1$. Откуда и p_i является квазилипшицевой порядка $p+1$. Тогда получим, что φ и ψ квазилипшицевы порядка $p+1$. На этом доказательство теоремы 1 закончено. Заметим, что у констант Липшица k_i, p_i, φ и ψ присутствует сомножитель Δ.

Таким образом мы получили, что теорема 1 обеспечивает существование и единственность решения системы уравнений (10)–(11).

5. Порядок сходимости

Определение 7. Будем говорить, что метод *сходится,* если

$$\max_{1 \leqslant \ell \leqslant N} \|u_\ell - y(t_\ell)\| \to 0, \quad \max_{1 \leqslant \ell \leqslant N} \|v_\ell - z(t_\ell)\| \to 0 \text{ при } N \to \infty,$$

и имеет *порядок сходимости p,* если найдется не зависящая от N постоянная C такая, что

$$\|u_\ell - y(t_\ell)\| \leqslant C\Delta^p, \quad \|v_\ell - z(t_\ell)\| \leqslant C\Delta^p, \quad \ell = 1, \ldots, N.$$

Следствие 2. *Отображения*

$$\Phi_1(\{u_i\}_\ell, \{v_i\}_\ell) = \psi(t_\ell, IE(\{u_i\}_\ell), IE(\{v_i\}_\ell)) \quad и$$
$$\Phi_2(\{u_i\}_\ell, \{v_i\}_\ell) = \varphi(t_\ell, IE(\{u_i\}_\ell), IE(\{v_i\}_\ell))$$

квазилипшицевы порядка $p+1$ по дискретной предыстории модели, т. е. существуют $L_{\Phi_1} = L_\psi L_I$, $L_{\Phi_2} = L_\varphi L_I$, $C_{\Phi_1} = C_\psi$ и $C_{\Phi_2} = C_\varphi$ такие, что выполняются неравенства для $j = 1, 2$

$$\left\|\Phi_j(\{u_i^1\}_\ell, \{v_i^1\}_\ell) - \Phi_j(\{u_i^2\}_\ell, \{v_i^2\}_\ell)\right\| \leqslant \\ \leqslant \Delta L_{\Phi_j} \max_{\ell - M \leqslant i \leqslant \ell} \left\|\begin{pmatrix} u_i^1 \\ v_i^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_i^2 \\ v_i^2 \end{pmatrix}\right\| + C_{\Phi_j}\Delta^{p+1}.$$

Доказательство. Для $j = 1$ выполнено

$$
\begin{gathered}
\left\|\Phi_1(\{u_i^1\}_\ell, \{v_i^1\}_\ell) - \Phi_1(\{u_i^2\}_\ell, \{v_i^2\}_\ell)\right\| \leqslant \\
\leqslant \Delta L_\psi \sup_{t_\ell - \tau \leqslant t < t_\ell + \alpha\Delta} \left\| \begin{pmatrix} u^1(t) \\ v^1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^2(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix} \right\| + C_\psi \Delta^{p+1} \leqslant \\
\leqslant \Delta L_\psi L_I \max_{\ell - M \leqslant i \leqslant \ell} \left\| \begin{pmatrix} u_i^1 \\ v_i^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_i^2 \\ v_i^2 \end{pmatrix} \right\| + C_\psi \Delta^{p+1}.
\end{gathered}
$$

Последнее неравенство справедливо в силу того, что оператор IE удовлетворяет условию Липшица.

Случай $j = 2$ доказывается аналогично.

Определение 8. *Невязкой (погрешностью аппроксимации) метода Розенброка* назовем пару функций $(\varphi(t_\ell), \psi(t_\ell))$ таких, что

$$
\varphi(t_\ell) = y(t_{\ell+1}) - y(t_\ell) - \sum_{j=1}^{s} \sigma_j \cdot k_j(y_{t_\ell}(\cdot), z_{t_\ell}(\cdot)),
$$

$$
\psi(t_\ell) = z(t_{\ell+1}) - z(t_\ell) - \sum_{j=1}^{s} \sigma_j \cdot p_j(y_{t_\ell}(\cdot), z_{t_\ell}(\cdot)).
$$

Для сокращения записи обозначим

$$
k_j(y_{t_\ell}(\cdot), z_{t_\ell}(\cdot)) = k_j(y, z), \quad p_j(y_{t_\ell}(\cdot), z_{t_\ell}(\cdot)) = p_j(y, z).
$$

Определение 9. Будем говорить, что *невязка имеет порядок p,* если найдется константа такая, что $\left\| \begin{pmatrix} \varphi(t_\ell) \\ \psi(t_\ell) \end{pmatrix} \right\| \leqslant C\Delta^p$ *для всех* $\ell = 0, 1, \ldots, N-1$.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1*, метод* (5)–(11) *имеет невязку порядка p+1, оператор интерполяции–экстраполяции предыстории модели имеет порядок p. Тогда метод сходится, причем порядок сходимости метода не меньше p.*

Доказательство. Обозначим $\epsilon_\ell = \left\| \begin{pmatrix} y_\ell \\ z_\ell \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_\ell \\ v_\ell \end{pmatrix} \right\|$ и выразим величину $\epsilon_{\ell+1}$ через ϵ_ℓ, при этом $\begin{pmatrix} y_{\ell+1} \\ z_{\ell+1} \end{pmatrix}$ подставим из определения невязки, а $\begin{pmatrix} u_{\ell+1} \\ v_{\ell+1} \end{pmatrix}$ – из пошаговой формулы (8)–(9).

$$
\epsilon_{\ell+1} = \left\| \begin{pmatrix} y_{\ell+1} \\ z_{\ell+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{\ell+1} \\ v_{\ell+1} \end{pmatrix} \right\| =
$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \varphi(t_\ell) + y(t_\ell) + \sum_{j=1}^{s} \sigma_j \cdot k_j(y,z) \\ \psi(t_\ell) + z(t_\ell) + \sum_{j=1}^{s} \sigma_j \cdot p_j(y,z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_\ell + \sum_{j=1}^{s} \sigma_j \cdot k_j(u,v) \\ v_\ell + \sum_{j=1}^{s} \sigma_j \cdot p_j(u,v) \end{pmatrix} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \begin{pmatrix} \varphi(t_\ell) \\ \psi(t_\ell) \end{pmatrix} \right\| + \epsilon_\ell + \left\| \begin{pmatrix} \varphi(t_\ell, y_{t_\ell}(\cdot), z_{t_\ell}(\cdot)) - \varphi(t_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)) \\ \psi(t_\ell, y_{t_\ell}(\cdot), z_{t_\ell}(\cdot)) - \psi(t_\ell, u_{t_\ell}(\cdot), v_{t_\ell}(\cdot)) \end{pmatrix} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant C\Delta^{p+1} + \epsilon_\ell + 2\Delta \cdot \max\{L_\varphi, L_\psi\} \max_{\ell-M \leqslant i \leqslant \ell} \epsilon_i + 2 \cdot \max\{C_\varphi, C_\psi\}\Delta^{p+1} \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{C}\Delta^{p+1} + \Delta\widehat{L} \max_{\ell-M \leqslant i \leqslant \ell} \epsilon_i + \epsilon_\ell.$$

Тогда имеем

$$\epsilon_{\ell+1} \leqslant \widehat{C}\Delta^{p+1} + \Delta\widehat{L} \max_{\ell-M \leqslant i \leqslant \ell} \epsilon_i + \epsilon_\ell. \tag{23}$$

Индукцией по ℓ докажем оценку

$$\epsilon_\ell \leqslant (1 + \Delta(\widehat{L} + 1))^\ell \widehat{C}\Delta^p. \tag{24}$$

База индукции. Выполняется, так как $\epsilon_0 = 0$.
Шаг индукции. Пусть оценка (24) выполняется для индексов $\leqslant \ell$, докажем ее справедливость для $\ell+1$. Пусть $\max$ в правой части оценки (23) достигается на индексе $i_0 \leqslant \ell$, тогда, применяя индуктивное предположение к ϵ_ℓ и ϵ_{i_0}, получаем

$$\begin{aligned} \epsilon_{\ell+1} &\leqslant \epsilon_\ell + \Delta\widehat{L}\epsilon_{i_0} + \widehat{C}\Delta^{p+1} \leqslant \\ &\leqslant (1 + \Delta(\widehat{L} + 1))^\ell \widehat{C}\Delta^p + \Delta\widehat{L}(1 + \Delta(\widehat{L} + 1))^{i_0} \widehat{C}\Delta^p + \widehat{C}\Delta^{p+1} \leqslant \\ &\leqslant (1 + \Delta(\widehat{L} + 1))^\ell \widehat{C}\Delta^p (1 + \widehat{L}\Delta + \Delta) = (1 + \Delta(\widehat{L} + 1))^{\ell+1} \widehat{C}\Delta^p. \end{aligned}$$

Следовательно, оценка (24) доказана.

Так как $N = \frac{\theta}{\Delta}$, то для всех $\ell = 0, \ldots, N$ имеем оценку

$$\epsilon_\ell \leqslant (1 + \Delta(\widehat{L} + 1))^{\frac{\theta}{\Delta}} \widehat{C}\Delta^p \leqslant e^{(\widehat{L}+1)\theta} \widehat{C}\Delta^p.$$

6. Порядок невязки

Можно построить оператор интерполяции–экстраполяции предыстории модели любого порядка (см. [7]). Тогда по теореме 2 следует, что для обеспечения сходимости метода с порядком p нам необходимо иметь невязку порядка $p + 1$.

В этом разделе рассматриваются только 4-этапные методы типа Розенброка, т. е. $s = 4$.

С помощью замены переменной $\Delta = t - t_\ell$ будем рассматривать все отображения, зависящие от длины шага Δ. Тогда выражения (8), (9) представляются в виде

$$u(\Delta) = u(0) + \sum_{j=1}^{4} \sigma_i k_j(\Delta), \tag{25}$$

$$v(\Delta) = v(0) + \sum_{j=1}^{4} \sigma_i p_j(\Delta). \tag{26}$$

Невязка записывается следующим образом:

$$\varphi(0) = y(\Delta) - y(0) - \sum_{j=1}^{4} \sigma_j k_j(\Delta), \tag{27}$$

$$\psi(0) = z(\Delta) - z(0) - \sum_{j=1}^{4} \sigma_j p_j(\Delta). \tag{28}$$

Разложим $y(\Delta)$, $z(\Delta)$, $k_j(\Delta)$, $p_j(\Delta)$ по формуле Тейлора в окрестности нуля. Получим

$$y(\Delta) = y(0) + y'(0)\Delta + y''(0)\frac{\Delta^2}{2} + y'''(0)\frac{\Delta^3}{6} + O(\Delta^4), \tag{29}$$

$$z(\Delta) = z(0) + z'(0)\Delta + z''(0)\frac{\Delta^2}{2} + z'''(0)\frac{\Delta^3}{6} + O(\Delta^4), \tag{30}$$

$$k_j(\Delta) = k_j(0) + k_j'(0)\Delta + k_j''(0)\frac{\Delta^2}{2} + k_j'''(0)\frac{\Delta^3}{6} + O(\Delta^4),\ j = 1, \ldots, 4, \tag{31}$$

$$p_j(\Delta) = p_j(0) + p_j'(0)\Delta + p_j''(0)\frac{\Delta^2}{2} + p_j'''(0)\frac{\Delta^3}{6} + O(\Delta^4),\ j = 1, \ldots, 4. \tag{32}$$

В соотношении (10) положим $\Delta = 0$, тогда

$$k_j(0) = 0,\ j = 1, \ldots, 4. \tag{33}$$

Подставим в уравнение (2) начальные условия, откуда имеем

$$g(0) = g(t_0, y(t_0), z(t_0), y_{t_0}(\cdot), z_{t_0}(\cdot)) \equiv 0. \tag{34}$$

Соотношение (11) поделим на Δ и подставим $\Delta = 0$, тогда получим

$$p_j(0) = 0,\ j = 1, \ldots, 4. \tag{35}$$

Будем записывать производные высших порядков как полилинейные выражения. Например,

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^3 g_i}{\partial t \partial y_j \partial z_k} \cdot a_j b_k \text{ будем записывать как } g_{tyz}(a,b),$$

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f_i}{\partial y_i \partial y_j \partial z_k} \cdot a_i \sigma_j c_k \text{ соответствует } g_{yyz}(a,b,c).$$

Подставим соотношения (29)–(32) в выражения (27), (28). Получим

$$\begin{aligned}\varphi(0) = \Delta\left[y'(0) - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j k_j'(0)\right] + \frac{\Delta^2}{2}\left[y''(0) - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j k_j''(0)\right] + \\ + \frac{\Delta^3}{6}\left[y'''(0) - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j k_j'''(0)\right] + O(\Delta^4),\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\psi(0) = \Delta\left[z'(0) - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j p_j'(0)\right] + \frac{\Delta^2}{2}\left[z''(0) - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j p_j''(0)\right] + \\ + \frac{\Delta^3}{6}\left[z'''(0) - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j p_j'''(0)\right] + O(\Delta^4).\end{aligned} \tag{37}$$

Из этих двух соотношений получаем следующие условия того, что невязка имеет четвертый порядок:

$$y_\Delta'(0) - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j k_j'(0) = 0, \tag{38}$$

$$y_\Delta''(0) - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j k_j''(0) = 0, \tag{39}$$

$$y_\Delta'''(0) - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j k_j'''(0) = 0, \tag{40}$$

$$z_\Delta'(0) - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j p_j'(0) = 0, \tag{41}$$

$$z_\Delta''(0) - \sum_{j=1}^{4}\sigma_j p_j''(0) = 0, \tag{42}$$

$$z'''_\Delta(0) - \sum_{j=1}^{4} \sigma_j p'''_j(0) = 0. \tag{43}$$

Далее будем обозначать справа снизу индексом 0 тот факт, что мы вычисляем значение отображений при $\Delta = 0$. Дифференцируя соотношения (1) и (2), можно выразить $y'(0), y''(0), y'''(0)$, $z'(0), z''(0), z'''(0)$.

Осталось выразить $k'_i(0), k''_i(0), k'''_i(0)$, $p'_i(0), p''_i(0), p'''_i(0)$. Для этого будем последовательно дифференцировать соотношения (10) и (11), предварительно соотношение (11) поделим на Δ.

При дифференцировании мы будем использовать формулу Лейбница

$$(\Delta f(\Delta))^{(q)}|_{\Delta=0} = q(f(\Delta))^{(q-1)}|_{\Delta=0}. \tag{44}$$

Опустим дальнейшие выкладки в силу их большого объема. Получившиеся условия на коэффициенты метода будут приведены в следующем разделе.

7. Подбор свободных параметров

Подбор коэффициентов осуществлялся для 4-стадийного метода типа Розенброка, т. е. $s = 4$. Потребуем, чтобы выполнялись восемь условий порядка для 4-стадийного метода. Эти условия порядка взяты из аналогичного метода для решения ДАУ (см. [1]). Выпишем эти условия:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = 1, \tag{45}$$

$$\sigma_2\beta'_2 + \sigma_3\beta'_3 + \sigma_4\beta'_4 = \frac{1}{2} - \gamma, \tag{46}$$

$$\sigma_2\alpha_2^2 + \sigma_3\alpha_3^2 + \sigma_4\alpha_4^2 = \frac{1}{3}, \tag{47}$$

$$\sigma_3\beta_{32}\beta'_2 + \sigma_4(\beta_{42}\beta'_2 + \beta_{43}\beta'_3) = \frac{1}{6} - \gamma + \gamma^2, \tag{48}$$

$$\sigma_2\alpha_2^3 + \sigma_3\alpha_3^3 + \sigma_4\alpha_4^3 = \frac{1}{4}, \tag{49}$$

$$\sigma_3\alpha_3\alpha_{32}\beta'_2 + \sigma_4\alpha_4(\alpha_{42}\beta'_2 + \alpha_{43}\beta'_3) = \frac{1}{8} - \frac{\gamma}{3}, \tag{50}$$

$$\sigma_3\beta_{32}\alpha_2^2 + \sigma_4(\beta_{42}\alpha_2^2 + \beta_{43}\alpha_3^2) = \frac{1}{12} - \frac{\gamma}{3}, \tag{51}$$

$$\sigma_4\beta_{43}\beta_{32}\beta'_2 = \frac{1}{24} - \frac{\gamma}{2} + \frac{3\gamma^2}{2} - \gamma^3, \tag{52}$$

где

$$\beta_i' = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij},\ \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij},\ \gamma_i = \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij},\ \gamma_{ii} = \gamma,\ \beta_{ij} = \alpha_{ij} + \gamma_{ij}. \qquad (53)$$

Для управления длиной шага потребуем, чтобы выполнялось следующее условие:

$$(\beta_2'\alpha_4^2 - \beta_4'\alpha_2^2)\beta_{32}\beta_2' = (\beta_2'\alpha_3^2 - \beta_3'\alpha_2^2)\sum_{j=2}^{3} \beta_{4j}\beta_j'. \qquad (54)$$

Выпишем четыре дополнительных условия на параметры метода, которые были получены в разделе 6 для обеспечения невязки четвертого порядка:

$$\sigma_4\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2^2 = \gamma^3 - \frac{2}{3}\gamma^2 + \frac{\gamma}{12}, \qquad (55)$$

$$\sigma_4\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2^3 = \gamma^3 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma}{20}, \qquad (56)$$

$$\frac{2\alpha_2^2\sigma_4\beta_{43}\beta_{32}}{\gamma^2} - \frac{2\sigma_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_{32}\beta_2'}{\gamma^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12\gamma}, \qquad (57)$$

$$\frac{\sigma_3\alpha_3\alpha_{32}\alpha_2^2 + \sigma_4\alpha_4\left(\alpha_{42}\alpha_2^2 + \alpha_{43}\alpha_3^2\right)}{\gamma^2} - \frac{\sigma_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_{32}\alpha_2^2}{\gamma^3} - \frac{\sigma_4\beta_{32}\alpha_4\alpha_{43}\alpha_2^2}{\gamma^3} = 1. \qquad (58)$$

Попытаемся с помощью выбора этих параметров выполнить эти условия. Выразим из условия (52) $\sigma_4\beta_{43}\beta_{32}$:

$$\sigma_4\beta_{43}\beta_{32} = \frac{\frac{1}{24} - \frac{\gamma}{2} + \frac{3\gamma^2}{2} - \gamma^3}{\beta_2'}.$$

Подставим это выражение в (55):

$$\alpha_2^2 = \frac{\gamma^3 - \frac{2}{3}\gamma^2 + \frac{\gamma}{12}}{\frac{1}{24} - \frac{\gamma}{2} + \frac{3\gamma^2}{2} - \gamma^3}\beta_2' = K\beta_2', \quad \text{где } K = \frac{\gamma^3 - \frac{2}{3}\gamma^2 + \frac{\gamma}{12}}{\frac{1}{24} - \frac{\gamma}{2} + \frac{3\gamma^2}{2} - \gamma^3}. \qquad (59)$$

Таким образом, если выполнено соотношение (59), тогда выполняется и (55). Коэффициент K не должен быть равен 0, иначе нельзя будет подобрать коэффициенты нужным образом. Если числитель дроби приравнять к нулю, то получим, что $K = 0$ при $\gamma = 0; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}$. Подставим соотношение (55) в (56). Тогда

$$\alpha_2 = \frac{\gamma^3 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma}{20}}{\gamma^3 - \frac{2}{3}\gamma^2 + \frac{\gamma}{12}} \neq 0 \qquad \text{при } \gamma \neq 0, \quad \gamma \neq \frac{\sqrt{5} \pm 1}{4\sqrt{5}}. \qquad (60)$$

Следовательно, при данном выборе α_2 из выполнения соотношения (55) вытекает выполнение (56). Подставим в соотношение (57) формулу (55). Тогда

$$\frac{2}{\gamma^2}\left(\gamma^3-\frac{2}{3}\gamma^2+\frac{\gamma}{12}\right)-\frac{2\sigma_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_{32}\beta_2'}{\gamma^2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12\gamma},$$

следовательно,

$$\sigma_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_{32}\beta_2'=\gamma^3-\frac{5}{6}\gamma^2+\frac{1}{8}\gamma\neq 0 \quad \text{при} \quad \gamma\neq 0,\ \gamma\neq\frac{5\pm\sqrt{7}}{12}. \tag{61}$$

Откажемся пока от условия (54). После того как мы найдем все коэффициенты, можно проверить, что это условие будет выполняться при подстановке найденных коэффициентов. Появилась одна степень свободы при определении коэффициентов β_2', β_3', β_4'. Поэтому возьмем

$$\beta_2'=\frac{\alpha_2^2}{K}. \tag{62}$$

Таким выбором коэффициента β_2' мы обеспечили выполнение условия (55). Рассмотрим условие (58). Возьмем коэффициент α_{43} равным 0 и, учитывая соотношение (62), представим это условие в виде

$$\frac{K}{\gamma^2}(\sigma_3\alpha_3\alpha_{32}\beta_2'+\sigma_4\alpha_4\alpha_{42}\beta_2')-\frac{K\sigma_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_{32}\beta_2'}{\gamma^3}=1.$$

Отсюда с помощью соотношений (50) и (61) мы получаем, что

$$1=\frac{K}{\gamma^2}\left[\frac{1}{8}-\frac{\gamma}{3}-\frac{1}{\gamma}(\gamma^3-\frac{5}{6}\gamma^2+\frac{1}{8}\gamma)\right],$$

следовательно,

$$K=\frac{\gamma}{\frac{1}{2}-\gamma}. \tag{63}$$

Таким образом, мы получили два соотношения, в которых определяется параметр K. Это соотношение (59) и (63). Приравняем полученные значения для параметра K.

$$\frac{\gamma}{\frac{1}{2}-\gamma}=\frac{\gamma^3-\frac{2}{3}\gamma^2+\frac{\gamma}{12}}{\frac{1}{24}-\frac{\gamma}{2}+\frac{3\gamma^2}{2}-\gamma^3},$$

$$\frac{\gamma}{24}-\frac{\gamma^2}{2}+\frac{3\gamma^3}{2}-\gamma^4=-\gamma^4+\frac{2}{3}\gamma^3-\frac{\gamma^2}{12}+\frac{1}{2}\gamma^3-\frac{1}{3}\gamma^2+\frac{\gamma}{24},$$

отсюда находим

$$\gamma^2\left(\frac{\gamma}{3}-\frac{1}{12}\right)=0, \quad \text{т. е.} \quad \gamma=0 \quad \text{или} \quad \gamma=\frac{1}{4}. \tag{64}$$

Так как коэффициент γ должен быть строго больше 0, то возьмем $\gamma = \frac{1}{4}$. Из соотношения (63) получаем, что при таком выборе γ коэффициент $K = 1$. Следовательно, при $\gamma = 0.25$ выполняется условие (58). Осталось выполнить последнее условие (61).

$$\sigma_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_{32}\beta_2' = \gamma^3 - \frac{5}{6}\gamma^2 + \frac{1}{8}\gamma.$$

Коэффициенты σ_4, β_{43}, α_3, β_2' мы уже знаем, поэтому добиться выполнения этого условия можно только за счет выбора параметра α_{32}. Используя соотношение (62), получаем

$$\alpha_{32} = \frac{\gamma^3 - \frac{5}{6}\gamma^2 + \frac{1}{8}}{\sigma_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_2^2}. \tag{65}$$

Таким образом мы выполнили все дополнительные условия. Посчитаем, чему равны коэффициенты метода. Из соотношения (60) получаем, что

$$\alpha_2 = \frac{\gamma^3 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma}{20}}{\gamma^3 - \frac{2}{3}\gamma^2 + \frac{\gamma}{12}} = \frac{\frac{1}{80} - \frac{1}{64}}{\frac{1}{64} - \frac{1}{48}} = 0.6.$$

Пусть $\alpha_3 = \alpha_4$. Тогда это приводит к ограничению

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{5} - \frac{\alpha_2}{4}}{\frac{1}{4} - \frac{\alpha_2}{3}} = 1.$$

Таким образом, вычисление коэффициентов $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma, \sigma_i$, удовлетворяющих (45)–(52), (53), (55), (56), (61), (58) проводится по следующему плану:

1. Возьмем $\gamma = 0.25$.

2. Выберем $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ так, чтобы выполнялись условия (45), (47), (49). Для этого имеется четыре степени свободы. Возьмем

   $$\sigma_3 = 0,\ \alpha_2 = 0.6,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = 1.$$

   Из условия (47) получаем, что

   $$\sigma_2 = \frac{1}{3\alpha_2^2} - \sigma_4\frac{\alpha_4^2}{\alpha_2^2}. \tag{66}$$

   Подставим σ_2 в (49). Тогда

   $$\alpha_4^3\sigma_4 = \frac{1}{4} - \sigma_2\alpha_2^3 = \frac{1}{4} - \frac{\alpha_2}{3} + \sigma_4\alpha_2\alpha_4^2,$$

следовательно,

$$\sigma_4 = \frac{\frac{\alpha_2}{3} - \frac{1}{4}}{\alpha_4^2(\alpha_2 - \alpha_4)} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}{-\frac{4}{10}} = \frac{1}{8}, \tag{67}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{3\alpha_2^2} - \sigma_4 \frac{\alpha_4^2}{\alpha_2^2} = \frac{25}{27} - \frac{25}{72} = \frac{125}{216}.$$

Из условия (45) получаем, что

$$\sigma_1 = 1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 1 - \frac{125}{216} - \frac{1}{8} = \frac{8}{27}.$$

3. Возьмем β_{43} так, чтобы удовлетворить нескольким условиям порядка для порядка 5. Поэтому β_{43} определяется из соотношения

$$\sigma_4\beta_{43}\alpha_3^2(\alpha_3 - \alpha_2) = \frac{1}{20} - \frac{\gamma}{4} - \alpha_2(\frac{1}{12} - \frac{\gamma}{3}).$$

Таким образом,

$$\beta_{43} = \frac{\frac{1}{20} - \frac{1}{16}}{\frac{1}{20}} = -\frac{1}{4}.$$

Возьмем

$$\beta_2' = \alpha_2^2 = \frac{9}{25}. \tag{68}$$

Из соотношения (46) выразим β_4':

$$\beta_4' = \frac{\frac{1}{2} - \gamma - \sigma_2\beta_2'}{\sigma_4} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{125}{216} \cdot \frac{9}{25}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{3}.$$

Так как справедливо условие (68), то из соотношения (51) вычтем соотношение (48). Получим

$$\sigma_4\beta_{43}(\alpha_3^2 - \beta_3') = \frac{1}{12} - \frac{\gamma}{3} - \frac{1}{6} + \gamma - \gamma^2,$$

Тогда

$$\beta_3' = \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2 - \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{12}}{\sigma_4\beta_{43}} = 1 - \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{32}} = \frac{5}{3}.$$

4. Из соотношений (51) и (52) найдем β_{32} и β_{42}:

$$\beta_{32} = \frac{\frac{1}{24} - \frac{\gamma}{2} + \frac{3\gamma^2}{2} - \gamma^3}{\sigma_4\beta_{43}\beta_2'} = \frac{\frac{1}{24} - \frac{3}{64}}{-\frac{9}{25\cdot 32}} = \frac{-\frac{1}{24\cdot 8}}{-\frac{9}{25\cdot 32}} = \frac{25}{54}.$$

$$\sigma_4(\beta_{42}\alpha_2^2+\beta_{43}\alpha_3^2)=\frac{1}{12}-\frac{\gamma}{3}=0,$$

следовательно,

$$\beta_{42}=-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\beta_{43}=-\frac{25}{9}(-\frac{1}{4})=\frac{25}{36}.$$

5. Найдем β_{31}, β_{41}:

$$\beta_{31}=\beta_3'-\beta_{32}=\frac{5}{3}-\frac{25}{54}=\frac{65}{54},$$
$$\beta_{41}=\beta_4'-\beta_{43}-\beta_{42}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{25}{36}=-\frac{1}{9}.$$

6. Потребуем, чтобы $\alpha_{43}=0$. Из условия (65) получаем, что

$$\alpha_{32}=\frac{\gamma^3-\frac{5}{6}\gamma^2+\frac{1}{8}}{\sigma_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_2^2}=\frac{-\frac{1}{192}}{-\frac{1}{32}\cdot\frac{9}{25}}=\frac{25}{54}.$$

Из условия (50) найдем α_{42}:

$$\alpha_{42}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{\gamma}{3}}{\sigma_4\alpha_4\beta_2'}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{25}}=\frac{25}{27}.$$

Найдем α_{31}, α_{41}:

$$\alpha_{31}=\alpha_3-\alpha_{32}=1-\frac{25}{54}=\frac{29}{54},$$
$$\alpha_{41}=\alpha_4-\alpha_{43}-\alpha_{42}=1-0-\frac{25}{27}=\frac{2}{27}.$$

7. Наконец, вычислим γ_{ij}:

$$\gamma_{21}=\beta_{21}-\alpha_{21}=\frac{9}{25}-\frac{3}{5}=-\frac{6}{25},\qquad \gamma_{31}=\beta_{31}-\alpha_{31}=\frac{65}{54}-\frac{29}{54}=\frac{2}{3},$$
$$\gamma_{32}=\beta_{32}-\alpha_{32}=\frac{25}{54}-\frac{25}{54}=0,\qquad \gamma_{41}=\beta_{41}-\alpha_{41}=-\frac{1}{9}-\frac{2}{27}=-\frac{5}{27},$$
$$\gamma_{42}=\beta_{42}-\alpha_{42}=\frac{25}{36}-\frac{25}{27}=-\frac{25}{108},\quad \gamma_{43}=\beta_{43}-\alpha_{43}=-\frac{1}{4}-0=-\frac{1}{4}.$$

Убедимся, что найденные коэффициенты удовлетворяют условию (54) для управления длиной шага, от которого мы отказались в начале параграфа:

$$(\beta_2'\alpha_4^2-\beta_4'\alpha_2^2)\beta_{32}\beta_2'=(\beta_2'\alpha_3^2-\beta_3'\alpha_2^2)\sum_{j=2}^{3}\beta_{4j}\beta_j'.$$

Подставим коэффициенты в это соотношение. Имеем

$$\frac{9}{25}\left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{25}{54}\cdot\frac{9}{25}=\frac{9}{25}\left(1-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{25}{36}\cdot\frac{9}{25}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{3}\right).$$

Вычисляя правую и левую части, получаем тождество $\frac{1}{25}=\frac{1}{25}$. Следовательно, система (45)–(58) непротиворечива. Таким образом, имеем следующие коэффициенты метода:

$$(\gamma_{ij})=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{6}{25} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{5}{27} & -\frac{25}{108} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

$$(\alpha_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0\\ \frac{29}{54} & \frac{25}{54} & 0 & 0\\ \frac{2}{27} & \frac{25}{27} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$(\sigma_i)=\begin{pmatrix}\frac{8}{27}\\ \frac{125}{216}\\ 0\\ \frac{1}{8}\end{pmatrix},$$

$$\alpha_2=0.6,\ \alpha_3=\alpha_4=1.$$

С таким набором коэффициентов невязка имеет четвертый порядок. Следовательно, по теореме 2 метод имеет третий порядок сходимости.

8. Численный эксперимент

Рассмотрим систему с параметрами, которая содержит как запаздывание, так и алгебраическую связь:

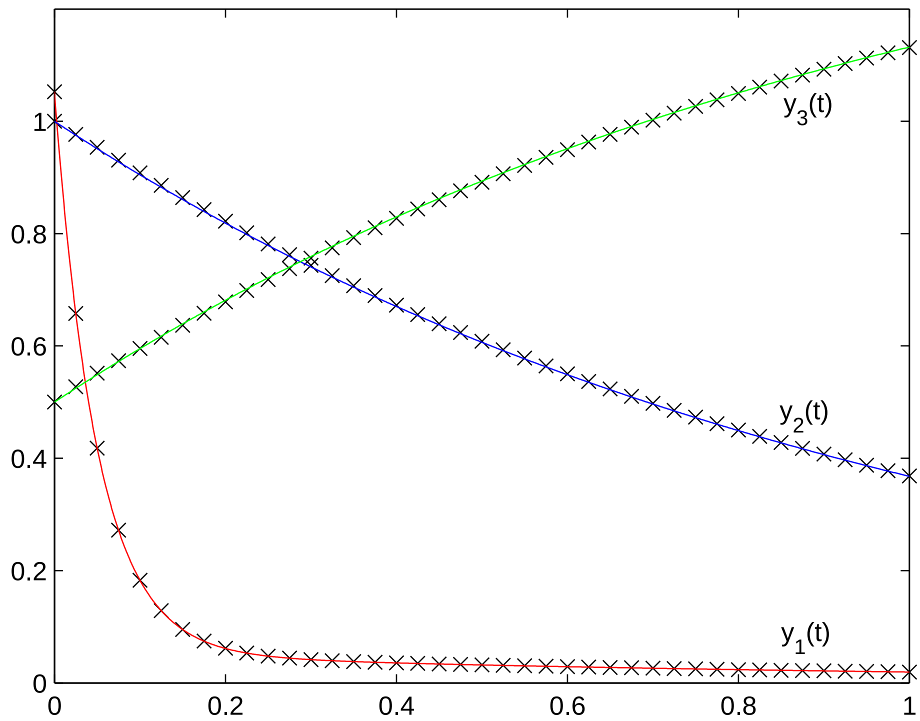
$$\begin{cases} \dot{y_1}(t)=\ell_1 y_1(t)+y_2(t)+y_1(t-1)-\frac{1}{ll_2-\ell_1}\cdot e^{\ell_2(t-1)}-e^{\ell_1(t-1)},\\ \dot{y_2}(t)=\ell_2 y_2(t)+y_3(t)-1.5+e^{\ell_2 t},\\ 0=(\ell_2-\ell_1)y_1(t)-y_2(t-1)+y_3(t)-1.5-(\ell_2-\ell_1)e^{\ell_1 t}+e^{\ell_2(t-1)},\\ y_1(t)=\frac{1}{\ell_2-\ell_1}\cdot e^{\ell_2 t}+e^{\ell_1 t},\ t\leqslant 0,\\ y_2(t)=e^{\ell_2 t},\ t\leqslant 0,\\ y_3(t)=1.5-e^{\ell_2 t},\ t\leqslant 0.\end{cases}$$

ℓ_1, ℓ_2 – параметры, $t \in [0,1]$. Точное решение задается теми же формулами, что и начальные условия:

$$y_1(t) = \frac{1}{\ell_2 - \ell_1} \cdot e^{\ell_2 t} + e^{\ell_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\ell_2 t}, \quad y_3(t) = 1.5 - e^{\ell_2 t}.$$

Система содержит постоянное запаздывание по y_1 и y_2.

Параметр ℓ_1 определяет жесткость системы и был взят равным -20. Значение параметра ℓ_2 рассматривалось равным -1. Значение шага разбиения было взято равным 0.025.



Сплошными линиями на рисунке обозначено точное решение, а маркерами – приближенное решение.

1. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Т. 2. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.

2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.

3. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1959.

5. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

6. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

7. Ким А. В., Пименов В. Г. i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.

8. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.

9. Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979.

10. Пименов В. Г. Численные методы решения ФДАУ и асимптотическое разложение решений сингулярных уравнений с запаздыванием // Вестн. ЧелГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика: Материалы Всерос. науч. конф., 19–22 сент. 2006 г. Челябинск, 2007. С. 143–151.

11. Пименов В. Г. Многошаговые численные методы решения функционально-дифференциально-алгебраических уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 145–155.

12. Деккерт К., Вербер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988.

Статья поступила 05.12.2007